

## 最新トピックを追い!

● ● ●  
ゲーム理論編

## マッチング・マーケットデザイン

小島武仁 Kojima Fuhito 安田洋祐 Yasuda Yosuke

## 1 はじめに

マーケットデザインと呼ばれるミクロ経済学の新しい分野を耳にされたことがあるだろうか? 伝統的な経済学が市場や制度を“与えられたもの”としてとらえ、主にその機能や帰結の分析に力を注いできたのとは対照的に、マーケットデザインでは経済制度を“設計するもの”と考え、現実の制度設計や制度変更を提案しているのが特徴的だ。このマーケットデザインの考え方は、近年になって欧米を中心に現実社会へ応用され始め、急速に関心を集めている。携帯電話に代表される周波数帯のオークション設計から、バスのルートや空港の発着枠の割り当て、本稿でも詳しく取り上げる医学部の研修医マッチングや学校選択制、果ては腎臓移植を希望する患者とドナーをマッチさせる臓器交換メカニズムに至るまで、その応用例は実に多岐にわたる。医学部の研修医マッチングは、臨床研修医制度が必修化された2004年を機に日本でも導入され話題を呼んだ。このように、マーケットデザインはきわめて実践的かつエキサイティングな分野なのである<sup>1)</sup>。

本稿では、近年注目が集まるマーケットデザインのなかでも、とりわけ有用な分析手法として知られるマッチング理論に焦点をあてる。マッチング・マーケットデザインとも呼ばれるこの分野で蓄積された理論的成果に加えて、これらの理論がどのように現実の市場や制度の設計に使われているのかを紹介していきたい。まず第2節において、研修医マッチングを例にとりながらマッチングの基本モデルを導入して、分析上キーとなる重要な概念やその性質を見ていく。第3節では、この数年で著しい発展を見せている学校選択制の理論分

析について最新の成果を盛り込みながら詳しく論じる。そこでは、一見すると研修医マッチングとほとんど同じ分析ができるように見える学校選択制が、さまざまな点において基本モデルを超えた新たな問題を生じさせることが明らかにされる。最後に第4節において、本稿では取り上げることのできなかったマーケットデザインの実践例に触れつつ、将来への展望について語りたい。

## 2 研修医マッチング

医学部の卒業生が、医師としてひとり立ちする前に病院で実地研修をする研修医制度は、各国で採用されている。日本においても近年の医療制度改革の目玉として、2004年から必修の臨床研修医制度が発足し、医学部卒業生に2年間の研修が義務付けられた。この研修制度とあわせて、どの研修医がどの病院で働くかを一定のルールに従って

## 著者紹介

こじま・ふひと

1979年生まれ。ハーバード大学経済学博士 (Ph.D.)。スタンフォード大学助教授およびイェール大学ポストドクトラルアシエイト。論文・著書: "Incentives and Stability in Large Two-Sided Matching Markets," with Parag A. Pathak, forthcoming, *American Economic Review*. "Risk-Dominance and Perfect Foresight Dynamics in N-Player Games," 2006, *Journal of Economic Theory*, 128, 255-273.

やすだ・ようすけ

1980年生まれ。プリンストン大学経済学博士 (Ph.D.)。政策研究大学院大学助教授。論文・著書: "Expanding 'Choice' in School Choice," (共著), *GRIPS Discussion Paper*, #08-17. 『経済学で出る数学』(経済セミナー増刊、共著、日本評論社、2008年)。

決める研修医マッチング制度が新たに採用された。このマッチング制度はアメリカで実に1950年代から使われているルールを基礎としており、理論的にも実証的にも、マッチングを公平かつ効率的に行うことができる方法であることが明らかにされている。本節では研修医マッチングの文脈に即して、マッチング理論の基礎的なトピックを解説していく。

はじめに、マッチング理論の基本的なモデルであるCollege Admissions Problemを説明する<sup>2)</sup>。以下では、マーケットにいくつかの病院と学生(医学部生)がいる状況を考えよう。各学生は病院に対して選好(好みのランキング)を持っている。たとえば

学生1：病院A、病院B

という記号は「学生1の第一希望は病院A、第二希望は病院Bで、他の病院はUnacceptableである(他の病院で働くよりも、どの病院ともマッチしないことを好む)」という意味だとする。病院は学生たちに対して選好を持っており、さらに各病院には定員が定められている。たとえば

病院A：学生1、学生2、学生3 定員2

と書いた場合、それは「病院Aの学生に対するランキングは学生1、学生2、学生3の順で、他の学生は採用したくなく、定員数は2である」という意味だとしよう。

マッチングは、どの学生がどの病院で働くかを指定した関数として表される。たとえば

病院A — 学生1、学生2

病院B — 学生3

病院C

学生4

と書けば、それは「病院Aは学生1と2を採用、病院Bは学生3を採用し、病院Cと学生4はUnmatched(どのパートナーともマッチしない)である」という意味だとする。

さて、マッチング問題をどのように数学的に表現すればよいかがあったところで、次にマッチングの望ましさを評価するための基準について考えてみたい。ここで登場する最も重要な概念がStability(安定性)と呼ばれる性質だ。まずはこ

れを定義したいのだが、そのための準備としてIndividual Rationality(個人合理性)とBlocking Pairという概念を説明しよう。

定義：あるマッチングがIndividually Rational(個人合理的)であるとは、どの学生や病院もUnacceptableな相手とマッチしておらず、どの病院も定員オーバーになっていないことを指す。

このアイデアの背景には、もしもIndividually Rationalでは“ない”マッチングが実現しているとすると、そのマッチングに“従わない”インセンティブをもつ学生か病院が少なくとも一人(ひとつ)はいることになるので、そもそもマッチングが実現できないだろうという考えがある。マッチングの望ましさを最低条件としてこのIndividual Rationalityを求めるのは理に適っているだろう。

それでは、Individually Rationalなマッチングはすべて望ましいと言えるだろうか？ 実は研修医マッチングの世界では、Individual Rationalityだけでは十分ではない。いま仮に、決められたマッチングに不満をもつ学生がいるとしよう。もしもその学生がもっと行きたいと思っている病院の定員に空きがあったらどうだろう？ あるいは定員が埋まっているにもかかわらず、いま採用している学生よりもこの学生の方が望ましいという病院があった場合はどうだろうか？ そのようなケースでは、この学生と病院のペアは最初に決められたマッチングに従わずに、お互いに自分たちで新たなマッチングを組み直すインセンティブがあるだろう。このアイデアを数学的に定義すると、次のようになる。

定義：次の(1)~(3)の条件を満たすような学生 $i$ と病院 $h$ のペアが存在するとき、マッチング $\mu$ がBlock(ブロック)されるという。また、このような $i$ と $h$ の組をBlocking Pairと呼ぶ。

(1)  $i$ は $\mu$ で定められた相手よりも、 $h$ をより好み

(2)  $i$ は $h$ にとってAcceptableであり $\mu$ のもとでは $h$ の定員に空きがあるか、もしくは $\mu$ のもとで定められた学生のうち $i$ よりも $h$ にとって望ましくない学生がいる

すでに説明したように、Blockされるようなマッチングは現実に達成できるとは考えにくい。そこで、マッチングの自然な安定性を定義することができる。

**定義：**マッチングがStable（安定）であるとは、Individually rationalであり、かつBlocking Pairが一組も存在しないことをいう。

いままで説明したように、Stableなマッチングは、そこから逸脱して利益を得ることができる参加者がいない、という意味で望ましいマッチングであると考えられる。ここで沸いてくる自然な疑問は、「はたしてStableなマッチングはつねに存在するのか？」「存在したとしても簡単に見つけ出すことができるのだろうか？」ということだろう。マッチング理論の記念碑的研究であるGale and Shapley (1962) は、まさにこの疑問を解決することでマッチングの分野を切り開いた。

**定理1：**College Admissions Problemには、必ずStable Matchingが存在する。（一般には複数存在しうる）Stable Matchingのひとつは、以下のDeferred Acceptance Algorithm（略称：DAアルゴリズム）で見つけることができる。

定理1がなぜ成り立つのかを説明するには、まずDAアルゴリズムとは何かを説明しなければならない。このアルゴリズムを行うためには、マッチング制度を中央集権的に運営する主体が、各学生の選好と各病院の選好および定員の情報を集める必要がある。この情報をもとに、以下のアルゴリズムを実行する<sup>3)</sup>。

■ステップ1：各学生は、自分の第一希望の病院に応募する。各病院は、応募してきた学生の中からAcceptableなものを上から順番に定員が埋まるまで“暫定的に”採用（仮マッチ）し、残りの学生を不採用にする。

■ステップt：ステップt-1で不採用にされた各学生は、まだ自分を不採用にしていない病院の中から自分の第一希望の病院に応募する（もしAcceptableな病院が残っていなければ、どこにも応募しない）。各病院は、このステップで新たに応募してきた学生と現在仮マッチしている学生の中からAcceptableなものを上から順番に定員が

埋まるまで仮マッチし、残りの学生を不採用にする。

■終了ルール：新たに不採用にされる学生が一人もなくなった時点でアルゴリズムが終了し、各病院がその時点で仮マッチしている学生を正式に採用する。

このアルゴリズムが有限回でストップすることは簡単に示すことができる。アルゴリズムがストップした時点での仮マッチを最終的なマッチングとするため、DAアルゴリズムを用いることできちんとマッチングを実現できることがわかる。

なぜDAアルゴリズムがStable Matchingを見つけてくれるのかは、驚くほど簡単に証明することができる。まず、DAアルゴリズムの結果がIndividually Rationalなことは次のようにわかる。まず、アルゴリズムのどのステップでも学生は決してUnacceptableな病院には応募しないので、最終的に学生がUnacceptableな病院とマッチすることはない。同様に、各病院はどのステップにおいてもUnacceptableな学生を仮マッチさせることはないので、最終的にUnacceptableな学生とマッチすることはない。そして各ステップで病院は定員以上の学生とは仮マッチしないので、最終的に定員を超えて採用することはない。

Blocking Pairが存在しないことは次のように示すことができる。たとえば学生1が、指定された病院よりも病院Aを好むとしよう。もしもこのような状況が発生しているとすれば、学生1はDAアルゴリズムのどこかのステップで病院Aに不採用にされていなければならない。ということは、学生1は病院AにとってUnacceptableであるか、そうでなければそのステップで病院Aの定員は学生1よりも望ましい学生ですすでに埋まっているはずである。前者の場合に学生1と病院AがBlocking Pairにならないのは明らかである。後者の場合にはアルゴリズムの性質から、各病院に仮マッチでやってくる学生はステップを重ねるごとに改善していく一方であるから、最終的に実現したマッチングでもやはり病院Aは学生1よりも望ましい学生を定員いっぱいまで採用していなければならない。この場合にも学生1と病院AがBlocking Pairになることはない。以上より、DAアルゴリズムで見つかるマッチングがStableであることが

示された。

定理1により、Stableなマッチングがつねに存在することが明らかになったが、実はStableなマッチングは1つであるとは限らないことが知られている。DAアルゴリズムは、複数存在するかもしれないStable Matchingsの中から特定のマッチングを見つけ出しているのである。実はこのDAアルゴリズムの選び方は、次のような非常に興味深い性質を持っている（証明はRoth and Sotomayor 1990、定理2.12を参照）。

**定理2**：DAアルゴリズムで発見されるマッチングでは、各学生は（一般には複数存在しうる）Stable Matchingの下でマッチできる病院の中から、最も望ましいものとマッチしている。

DAアルゴリズムは現実の労働市場で使用され、成功を収めている。最も有名なのはアメリカの研修医・病院マッチング市場であるNational Resident Matching Program (NRMP) である。マッチング理論が経済学で注目されるきっかけを作ったといわれるRoth (1984) は、アメリカの研修医マッチングで実際に使われているアルゴリズムがDAアルゴリズムと同じものであることを発見した。Gale and Shapley (1962) の論文は1962年刊行である一方、現実の研修医マッチングにおいては1950年代からこのアルゴリズムが使われており、これらの発見は互いに独立であるようだ。経済学者たちによって理論的な関心から導かれた方法と、マーケットにおける試行錯誤から生まれた方法が一致しているということは非常に興味深い。

これまで見てきたように、DAアルゴリズムは提出されたどんな選好に対してもStable Matchingを発見できる強力な方法である。しかし実際にDAをメカニズムとして現実社会へ応用する理由としては、ここまで紹介してきた結果だけでは不十分だろう。というのは、選好の情報は各学生や各病院しか知らない私的情報であるから、もしもDAが学生や病院がウソをついて得できる仕組みであったら、実現するマッチングが本当の選好に照らして望ましい結果になっていないかもしれないからである。幸いなことに、DAアルゴリズムの下では、どの学生にとっても正直に選好を報告することが支配戦略になっていることが知られている。つまり、学生たちは他の学生や病院がど

のような選好を報告していても、自分は正直に選好を報告するのが最適な戦略になっているのである<sup>4)</sup>。この性質はStrategy-Proofness（戦略的操作不可能性）と呼ばれ、マーケットデザインで最も重要な性質のひとつと考えられている。

学生側にウソをつくインセンティブがないことはわかったが、病院側についてはどうだろうか？残念ながらDAアルゴリズムのもとでは、ある病院がウソをついて得ができるような場合がある。たとえば学生と病院の真の選好が次のように与えられているとしよう。

学生1：病院A、病院B	
学生2：病院B、病院A	
病院A：学生2、学生1	定員1
病院B：学生1、学生2	定員1

もしすべての参加者が正直に申告したとすると、DAアルゴリズムでは最初のステップで学生1が病院A、学生2が病院Bに応募して仮マッチされ、これがそのまま最終的なマッチングとして確定する。次に、病院Aが「学生2だけがAcceptableで、学生1はUnacceptable」だとウソを申告したとしよう。すると、DAアルゴリズムの第1ステップでは、学生1は病院Aに不採用になる。そして第2ステップで学生1は病院Bに応募して、これを受けた病院Bは学生1を仮マッチして学生2を不採用にする。第3ステップで学生2は病院Aに応募し、仮マッチされる。この段階でアルゴリズムは終了するので、最終的に確定したマッチングでは病院Aは第一希望である学生2とマッチすることができる。この例から、病院Aはウソをつくインセンティブを持っていることがわかった。

残念なことに、このインセンティブの問題はDAアルゴリズムだけのものではない。Roth (1982) は、さらに一般的な不可能性定理を証明した。

**定理3**：StableかつStrategy-Proofなメカニズムは存在しない。

この定理の証明は驚くほど簡単であるが（Roth and Sotomayor 1990、定理4.4を参照）、その政策的含意は重要である。インセンティブの問題はDAアルゴリズム特有の問題ではなく、Stabilityを要求する限り決して解決できない問題であると

いうのだ。つまりこの定理は、マッチングの運営者がどれだけメカニズムを工夫してもインセンティブの問題を完全に解決することはできない、という不幸な政策的含意を導いてしまうのである。

ところが不可能性定理は研究の終わりではない。不可能性定理は“完全な”Strategy-Proofnessの実現が不可能であることを示しているだけであり、実際のマーケットで特定のメカニズムを使った場合に、各参加者がウソをつく危険性が高いのかどうかについては何も述べていない。もしも実際のマーケットでウソをつくインセンティブが無視できるほど小さいならば、現実的にはDAアルゴリズムを使うことに重大な問題はないのではないか？ この問題を分析した論文に、Roth and Peranson (1999) がある。彼らはNRMPに実際に提出されたデータを用いて、参加者のうちどの程度の割合がウソをつくインセンティブを持つかを計算した。その結果、驚くべきことに4000近い病院の中からウソをつくインセンティブを持つのはわずか20から30程度であることが明らかにされた。Immorlica and Mahdian (2005) や Kojima and Pathak (forthcoming) によってこの現象の理論的説明が与えられている。彼らによれば、マーケットが大きい、つまりマーケット参加者の数が多いと、各病院が自分の報告によりDAアルゴリズムに与えることができる(病院自身に都合のよい)影響は小さくなっていくという。このため、病院がウソをついて得できる可能性は減少していく。さらに、マーケットサイズが限りなく大きくなっていくにつれて、ウソをつくインセンティブはゼロに収束する。NRMPは非常に大きいマーケットであり(病院数約4000、学生数約25000)<sup>5)</sup>、こういった大きなマーケットでは、たとえStrategy-ProofでないDAアルゴリズムを用いたとしても、実際上の問題点はクリアされているということが示唆されているのである。

このように、従来考えられてこなかったマーケットサイズとStable Matchingの関係は伝統的な理論で知られていたマッチングメカニズムの限界を克服する可能性を秘めている。また、上で見てきたアプローチは実際の市場環境を真剣に観察することから着想されている、という点も重要である。現実のマーケットはしばしばサイズが大きいという単純な事実や、伝統的理論による不可能性

定理が実際のマーケットでそこまで致命的な問題になっていない、という観察事実などがこれに相当する。その意味で、こういった研究方法は現実社会への応用を強く意識するという、マーケットデザインの典型的なアプローチと言えらるだろう。マーケットサイズとマッチングメカニズムの興味深い関係は、次に取り上げる学校選択の文脈にも現れる。

### 3 学校選択制

学校選択制とは、公立学校の生徒たちが従来の通学区域にしばられることなく複数の選択肢の中から学校を選べるようにする新しい制度である。80年代後半から各国で導入がスタートした学校選択制は、多くの国において教育問題の中心的なテーマとして高い関心を集めている。日本でも、1998年の三重県紀宝町を皮切りに全国で導入が進められており、選択制が教育の質や学校間格差に与える影響などを中心に活発に論争や研究が行われてきた。しかしながら、従来の議論においては学校選択制という制度自体の“是非”にもっぱら関心が集まり「現行方式による運営が本当に望ましいのか?」「より多くの学生が行きたい学校へ通うことができる新方式は考えられないか?」といった、“制度選択”や“制度設計”の視点が欠けていたように思われる<sup>6)</sup>。本節では、マッチング理論の視点から、学校選択問題および学校選択制の制度設計について論じていく。なお、日本における学校選択制については本誌の竹内幹氏の記事「東京都の学校選択制度」(pp.85-88)が詳しい解説を行っているのでそちらもぜひ参照していただきたい。

#### 3.1 研修医マッチングとの共通点と違い

学校選択問題の基本的な枠組みはAbdulkadir-oglu and Sonmez (2003) によって定式化された。数学的にはこの問題は研修医マッチングと“ほとんど”同じである。学生が学校に対して(Strictな)選好を持つ点はまったく同じで、学校についても、典型的な公立学校は学生に対してPriority Order(優先順位)を持っている。たとえば、学生Aが学生Bよりも学校の近くに住んでいれば、学生Aの

入学を優先する、といった具合である。数学的にはこのPriority Orderを、あたかも学校が学生に対して持っている選好だとみなすことができるので、形式的には学校選択問題は第2節で扱ったCollege Admissions Problemと一対一に対応している<sup>7)</sup>。

さらに第2節で触れた定理2は学校選択では特別な意味を持つ。この定理は、DAアルゴリズムによって見つかるマッチングが、Stableなマッチングの中で、すべての学生にとって最も望ましいマッチングになっていることを意味しているのである。もしも学校選択制の文脈において、学生の厚生のみを社会厚生として定義するならば、DAアルゴリズムの結果はStabilityを満たす中でパレート最適なマッチングになっていることがわかる。ただしこの結果は、学校のPriority OrderがStrictに与えられているという仮定に強く依存しているため注意が必要である。この点については後で詳しく検討を加える。

マッチングメカニズムの理論は現実の公立学校の入学制度にも取り入れられ始めている。その最も有名な事例が、アメリカのニューヨーク市とボストン市で行われた学校選択制の制度変更だろう。ニューヨークでは2003年、ボストンでは2005年から旧来の学校選択制に代わってDAアルゴリズムが使われている。

さて、学校選択問題は研修医マッチングと非常に似ていることはすでに説明したが、学校選択ならではの興味深い性質も多く存在する。そのなかでも恐らく最も特徴的な点は、公立学校におけるPriority Orderは多くの場合法律で定められており、学校の私的情報ではないということであろう。前節で説明したStrategy-Proofnessを思い出してほしい。DAアルゴリズムが抱えていた重要な問題は、オファーを受ける側にとってStrategy-Proofになっていないという点であった。ところがここで考えている学校選択問題では学校がそもそも私的情報を持っておらず、その場合には学校をStrategicなプレーヤーと考える必要がない。よって、学生側からオファーを出していくDAアルゴリズムを採用する限り、マーケットのすべての参加者についてStrategy-Proofnessが保障されるのである。実際、Strategy-Proofnessはニューヨーク市やボストン市でDAアルゴリズムが採用

された決定的な理由のひとつだとされている<sup>8)</sup>。このようにマッチング理論は新しい応用先を発見し、理論から得られた知見が以前の労働市場と同様、あるいはそれ以上に強力なツールとして用いられているのである。

これまで強調してきたように、マッチング・マーケットデザインが近年発展してきたひとつの理由として、マーケットを虚心坦懐に見つめることで新しい理論の発展が促されてきたという点が挙げられる。学校選択制の文脈でもひとつ例を紹介しよう。いままで説明してきた学校選択問題では、学校の学生に対するPriority OrderはStrictであるとしてきた。ところが実際には、学生に対する公立学校のPriorityは多くのIndifference（無差別）を含んでいる（つまり、同順位の優先順位を持つ学生が複数いる）。たとえばボストン市の場合には、各学校の学生に対するPriority Orderは4つのグループに分けられる。具体的には

- (1) 学校の近所に住んでおり、かつ兄弟が同じ学校に通っているグループ
- (2) 兄弟が同じ学校に通っているグループ
- (3) 学校の近所に住んでいるグループ
- (4) 上記のいずれにも該当しない学生

の順番にPriorityが与えられている。これから見てわかるように、実際には何十人・何百人もの学生が同じPriorityを与えられることとなる。一方Gale and Shapleyによって提案されたDAアルゴリズムでは、すべての選好はStrictになっていることが前提であり、Indifferenceはないものと仮定されている。この違いを克服するためにボストン市で採用されたマッチングメカニズムでは、まずIndifferentな学生たちをランダムに順位付けしてPriority Orderを人工的にStrictに変えて（タイブレーキング）、その上でDAアルゴリズムによるマッチングを行っているのである。

ボストン市が採用したこの「タイブレーク + DA」のやり方は、一見すると文句の付けようがない方法に思えるが、実はこれは完璧な方法であるとは言えない。Erdil and Ergin (2008) は人工的なタイブレーキングのせいで効率性が犠牲になってしまう可能性を指摘した。彼らの論文で紹介された次の例を見てみよう。

学生1：学校B、学校A、学校C  
 学生2：学校C、学校B、学校A  
 学生3：学校B、学校C、学校A  
 学校A：学生1、(学生2と学生3が無差別)  
           定員1  
 学校B：学生2、(学生1と学生3が無差別)  
           定員1  
 学校C：学生3、(学生1と学生2が無差別)  
           定員1

この例で、タイブレイクを学生の番号順に行ったとする。つまりIndifferenceがある限り学生1、学生2、学生3の順番にPriorityを与えてみよう。するとタイブレイク後の学校の学生に対するPriority Orderは

学校A：学生1、学生2、学生3    定員1  
 学校B：学生2、学生1、学生3    定員1  
 学校C：学生3、学生1、学生2    定員1

となる。このタイブレイク“後の”Priority Orderの下でDAアルゴリズムを用いて見つけられるマッチングは

学校A — 学生1  
 学校B — 学生2  
 学校C — 学生3

となる。ところが次のマッチング

学校A — 学生1  
 学校B — 学生3  
 学校C — 学生2

もタイブレイク“前の”Priority Orderに関してはStableになっている。しかもこのマッチングはDAで発見されたマッチングをパレート支配している。このことから、タイブレイク+DAを行うと最終的なマッチングの効率性を犠牲にしてしまう危険性があることがわかるのである。前述したように、定理2は学校選択問題でDAを使うことを効率性の立場から正当化するものと考えられていた。しかしここで見たように、もしも学校のPriority OrderがIndifferenceを含んでいる場合には、効率性による正当化は厳密には正しくないことになる。

この事実から出発して、Erdil and Ergin (2008)

はタイブレイクする前のPriority Orderに対してStableなマッチングを考え、その中で最も効率的な(より正確に言うとConstrained Efficientな)マッチングを発見する、Stable Improvement Cycles (SIC) アルゴリズムを提案した。Abdulkadiroglu, Pathak and Roth (forthcoming) は、ボストン市およびニューヨーク市のデータを用いて、各学生がSICアルゴリズムでもDAと同じく正直に選好を申告するという仮定の下でSICアルゴリズムがどの程度効率性を改善するかを測定している。その結果、ボストン市に関してはほとんど変化が見られないものの、ニューヨーク市については無視できない効率性の改善が見られることが明らかになった。ただしSICアルゴリズムが学生についてStrategy-Proofになって“いない”ことも、Erdil and Ergin自身によって指摘されており、実際にSICアルゴリズムを用いるべきかどうかには十分な検討が必要であろう。

### 3.2 学校選択における抽選と効率性

実はPriority OrderにIndifferenceが存在することは、さらに新しい興味深い問題への道を開いている。いままでの議論ではマッチングの効率性は事後的にのみ評価されていた。言い換えると、最終的に決定されたマッチングを見たときにそこから改善の余地がなければ、マッチングは効率的であると考えられた。しかしIndifferenceがある場合のマッチングメカニズムでは、まずランダムにタイブレイクを行わなければならない。言い換えると、学校の定員と比べて入学希望者が多い時には、抽選を行わなければならないのである。これは何を意味するのか。それは、学生たちが受け取るものはDeterministicに決められた学校ではなくて、いろいろな学校に対する確率分布、つまりクジであるということである。経済学でよく知られているように、事後的な効率性は事前での効率性を必ずしも意味しない。この点を確認するために、Bogomolnaia and Moulin (2001) を元に単純化した、次の例を考えよう。

学生1、2：学校A、学校B  
 学生3、4：学校B、学校A

学校A、Bともにすべての学生はIndifferentであり、定員は1であるとしよう。タイブレイクの

仕方は両学校で共通であり（これをSingle Tie Breakと呼ぶ）、そのやり方は一様分布であるとする<sup>9)</sup>。たとえばタイブレイクによる優先順位が1、2、3、4の順番であれば、学生1が学校A、学生2が学校Bへ入学を許可される一方、学生3、4はUnmatchedとなる。逆に優先順位が4、3、2、1の順番であれば、学生4が学校B、学生3が学校Aへ入学を許可され、学生1、2はUnmatchedとなる。これは明らかに非効率的である。なぜかといえば、正の確率で学生2は望ましくない学校Bに入学している一方で学校Bは学生3にとって第一希望であり、逆に正の確率で学生3は望ましくない学校Aに入学している一方で学校Aは学生2にとって第一希望であるから、もしも事前にこれらの確率を交換できたならば双方の学生にとって得だからである。ここで、各学生がそれぞれの学校に対して持っている好みの“強さ”（= Cardinal Preference）には一切触れていない点に注意しよう。これは、上記のランキング（= Ordinal Preference）を満たす“どのような” Cardinal Preference、つまり期待効用関数を各学生が持っていたとしても事前の確率交換によって学生たちが得をすることができる、ことを意味する。このような場合に、事前の確率的な配分は Ordinally Efficientではないと言う。つまり、タイブレイク+DAアルゴリズムは Ordinally Efficientではない、という意味で事前的な非効率性を生み出す危険性を秘めているのだ。ちなみに前述した SICアルゴリズムでもここで紹介した非効率性が克服できないことは簡単に確認できる。

Bogomolnaia and Moulin (2001) はさらに、事前の非効率性をなくす新しいメカニズムとして Probabilistic Serial (PS) メカニズムを提案し、この新メカニズムが Ordinally Efficientであることを証明した。ところが残念なことに、PSメカニズムは Strategy-Proofではないことも明らかにされた。そのため、タイブレイク+DAとPSメカニズムのどちらを採用すべきかについては活発な議論が起きている。たとえば Pathak (2008) はタイブレイク+DAを使っているニューヨーク市のデータを研究した。彼の結果によれば、確かに DAと比較するとPSメカニズムは効率性の点で勝っているが、効率性の向上幅はごくごく小さいものだという。このこととPSが Strategy-Proofでない

ことから Pathak (2008) は DAを推奨する立場をとっている。一方で Kojima and Manea (2007) は、マーケットが大きくなるとPSメカニズムが Strategy-Proofになることを理論的に示し、ニューヨークの学校選択のようにマーケットサイズが大きい場合にPSを用いることに対する一定の正当化を与えた。この対立は Che and Kojima (2008) によってさらに研究された。彼らは、実はマーケットが大きくなっていくとタイブレイク+DAとPSメカニズムはお互いに近づいていき、マーケットサイズが無限になった極限では完全に一致することを示したのである。この意味で、どちらのメカニズムも一般には不完全であるが、大きなマーケットではどちらもお互いの短所を補い合い、より強い正当性を獲得することがわかる。なお方法論的には、第2節で触れたのと同様に、ここでもメカニズムを評価するにあたってマーケットサイズが有用な役割を果たしていることが見て取れるだろう。

以上で見てきたように、タイブレイク+DAはマーケットサイズが十分に大きい場合には近似的に Ordinally Efficientになることがわかった。それでは、タイブレイク+DAは十分に大きいマーケットにおいては事前の非効率性を全くもたらさないとと言えるのだろうか？ Abdulkadiroglu, Che and Yasuda (2008) は、各学校に対する学生たちの Ordinalな好みだけではなく Cardinalな好みまで考慮に入れると、事前の非効率性が発生することを明らかにした。まずは彼らの論文で紹介された以下の例を見てみよう<sup>10)</sup>。

	学校A	学校B	学校C
学生1	4	1	0
学生2	4	1	0
学校3	3	2	0

各学校の定員は1人ずつで、いままでの例と同じようにすべての学生は学校にとって Indifferent だとして。表の中の数字は各学生の期待効用を表しており、学生1と2は、学校A、B、Cとマッチした時にそれぞれ4、1、0の利得を得る一方で、学生3は3、2、0の利得をそれぞれ得る。これは、どの学生も学校A、B、Cの順番に好んでいるものの、どれだけその学校に行きたいかの強さが学生の間で異なる状況を表している<sup>11)</sup>。



この状況でタイプブレイク + DA を行うと、Strategy-Proofness が満たされているためすべての学生が A、B、C の順番のランキングを提出することになり、結局  $\frac{1}{3}$  ずつの確率で各学校とランダムにマッチする。この時の事前の期待効用を計算すると

$$\text{学生 1、2 : } 4 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{学生 3 : } 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

となり、全員が  $\frac{5}{3}$  を得ることがわかる。ここで、タイプブレイク + DA とは異なる次のような確率的な配分を考えてみたい。「学生 1、2 は半々の確率で学校 A および C とマッチし、学生 3 は確率 1 で学校 B とマッチする」というものだ。こちらのクジのもとでは、どの学生も 2 の期待効用を得ることが簡単に計算できる。つまり、この新たな配分は、すべての学生にとってタイプブレイク + DA によってもたらされる配分よりも事前の意味で望ましい（正確に言うと、パレート優位にある）のである。

実はこの望ましい配分は、旧来ボストンで用いられていた方式（以後、ボストンメカニズムと呼ぶ）によってもたらされる配分に一致することを示すことができる。ボストンメカニズムは DA アルゴリズムと一見するとよく似たアルゴリズムなのだが、各ステップで決まるマッチが仮マッチではなく最終的なマッチである点が大きく異なる。一度定員が埋まってしまった学校には後から申し込むことができないため、学生はランキングを偽って報告することで得できるかもしれない。つまり、ボストンメカニズムは Strategy-Proofness を満たさないのだ。実際にこの例でボストンメカニズムを用いると、学生 1 と 2 はランキングを正直に申告するが、学生 3 はランキングを偽って学校 B を第一希望とすることがわかる<sup>12)</sup>。この時、さきほどの望ましい確率的な配分がまさに実現されるのである。

ここで注目したいのが、ボストンメカニズムが DA アルゴリズムよりも事前の意味で効率的になる理由だ。DA アルゴリズムは Strategy-Proof で

あるため、どんなに Cardinal な好みが変わっていても、各学生は自分の Ordinal な好み“だけ”に応じたランキングを提出せざるを得ない。一方のボストンメカニズムは Strategy-Proofness を満たさないために、各学生は自分の Cardinal な好みに応じてランキングを変更できる可能性がある。つまり、DA アルゴリズムは Cardinal な好みを一切くみ取ることができないのに対して、ボストンメカニズムは戦略的なランキングの操作によってその一部を反映させることができるのだ。上記の例においても、「学校 A に強く行きたいと思っている学生 1 と 2 がリスクを犯して学校 A を第一希望に指定する」のに対して、「学校 B でもそれなりに満足できる学生 3 は確実に席をキープすることができる学校 B を第一希望に選ぶ」、という形で選好の強さがうまく反映されていることがわかる。こうした効率性の改善は、DA アルゴリズムに代表されるような Strategy-Proof なメカニズムでは起こり得ない。この意味において、Strategy-Proofness と事前の効率性との間には、トレード・オフが存在するのである。

Abdulkadiroglu, Che and Yasuda (2008) はさらに、Strategy-Proofness をできるだけ崩さずに事前の非効率性を抑えるような新たなメカニズムとして、Choice-Augmented Deferred Acceptance (CADA) アルゴリズムを提案した。CADA アルゴリズムは、ランキングの提出の他に、(1 つだけ) 選んだ学校に対して自分の Priority を上げることのできる指定校オプションを加えた、DA アルゴリズムの修正版となっている。どの学校に指定校オプションを使うのかは各学生が戦略的に決めなければならないものの、学校に対するランキングは正直に申告するのが支配戦略になっているため、DA アルゴリズムと同様にランキング提出に関する Strategy-Proofness は満たされる。一方で、この指定校オプションの導入が事前の効率性を大きく改善することを、理論とシミュレーションの両面から彼らは示している。

以上駆け足で近年の発展が著しい学校選択制の研究を展望してきた。この分野の草分け的存在の Abdulkadiroglu and Sonmez (2003) は 2003 年の出版であり、ニューヨークやボストンで DA アルゴリズムが使われ始めたのも 2000 年代に入ってからである。このことからわかるように、学校選択

は非常に新しい研究分野であり、今後の発展がおおいに期待できるというのが筆者たちの考えである。

## 4 まとめ

以上、マッチング理論とその応用であるマーケットデザインについて駆け足で概観を試みた。本稿を終える前に、ここでは扱えなかった周辺分野も急速な発展を見せていることを指摘しておきたい。たとえばRoth, Sonmez and Unver (2004, 2005, 2007) による一連の研究により、生体臓器移植の問題がマッチングの問題としてデザイン可能であることが明らかにされた。彼らはアメリカにおける臓器提供のネットワークを構築するために活躍中である<sup>13)</sup>。またオークション理論をマーケットデザインに応用した成功例も多数ある。複数財のオークションは近年発展が著しい分野であり、本連載10月号の横尾真氏の記事で詳しく取り上げられる予定である。ここでは、複数の財を扱うオークションとマッチングにはさまざまな類似性があることを指摘しておく。詳しくはHatfield and Milgrom (2005), Milgrom (2007), Hatfield and Kojima (2009)などを参照されたい<sup>14)</sup>。

マッチング・マーケットデザインは1990年代後半以降に急速な発展を見せており、現在でも新しい問題や発見が次々と生まれてきている。また、この分野に身をおく研究者として、筆者たちはマッチング・マーケットデザインが今後もエキサイティングな分野として急速に発展していこうと期待している。日本の研究者の方々、とくに経済理論に興味を持つ若手研究者のみなさんが、マッチングという研究分野の広がりや可能性を本稿から感じていただければ、書き手としてそれに勝る喜びはない。

\*本稿の作成にあたり河村耕平氏および成田悠輔氏から有益な助言をいただいたことに感謝したい。

### 注

1) マーケットデザインに関する多くの情報や展望論文が、この分野を牽引するAlvin Rothハーバード大学教授のウェブサイト (<http://kuznets.fas.harvard.edu/~aroth/>

alroth.html) から得ることができる。邦語によるコンパクトな展望論文としては安田 (2008) を挙げておく。

- 2) College Admissions Problemという呼称は、マッチング分野を切り開いた先駆的研究であるGale and Shapley (1962) による。もちろんこのモデルは大学入試以外にも適用が可能であり、ここでの用語は便宜上のものである。
- 3) DAアルゴリズムは、考案者の名前を取ってしばしばGale-ShapleyアルゴリズムやGale-Shapleyメカニズムなどとも呼ばれる。このアルゴリズムのわかりやすい図解が、医師臨床研修マッチング協議会のホームページ (<http://www.jrmp.jp/>) に掲載されている。
- 4) 実際にはGroup Strategy-Proofnessという性質が知られている。これは、たとえ学生たちが相談して一緒にウソをついても、そのグループ全員が得することはないという性質である。この点についての現在のところ最も一般的な結果は、Hatfield and Kojima (forthcoming) で与えられている。
- 5) ここではRoth and Peranson (1999) が対象にした1990年代半ば時点の数値を紹介した。NRMPの参加者は近年増加傾向にあり、詳しい数値はNRMPのウェブサイト (<http://www.nrmp.org/>) で見つけることができる。
- 6) 安田 (2009) が学校選択制の是非をめぐる論点の整理を行っている。
- 7) 現実の学校選択問題ではしばしばPriority OrderがStrictに与えられておらず、このことが新しい理論的課題を生み出している。この点については後に述べることにする。
- 8) Strategy-Proofnessは、戦略的な思考に長けているかどうかによって結果が左右されない、という公平性に関する利点も持っている。詳しくはAbdulkadiroglu, Pathak and Roth (forthcoming) を参照。
- 9) このやり方の他に、各学校で独立にタイブレークを行うMultiple Tie Breakという方法も知られている。Single Tie BreakとMultiple Tie Breakのどちらの方式が望ましいかについては、実務および理論の両面から活発に議論されている。最新の理論的成果はAbdulkadiroglu, Che and Yasuda (2008) に詳しい。
- 10) 以下で紹介する非効率性はマーケットが大きくなってでも解消しないことが明らかになっている。
- 11) この例ではすべてのマッチングが事後的にはパレート効率的なので、Erdil and Ergin (2008) の提唱したSICを用いても結果は一切改善されない。
- 12) 正確に言うと、ポストンメカニズムを完備情報ゲームとして考えた時に、このランキングの組合せがナッシュ均衡になっている。
- 13) 詳しくはRothのウェブサイトの該当箇所 (<http://kuznets.fas.harvard.edu/~aroth/alroth.html#Kidney Exchange>) を参照。
- 14) 本稿で解説したマッチングに加えて臓器移植やオークションまで取り上げている優れた専門書として、坂井・藤中・若山 (2008) を挙げたい。

### 参考文献

- Abdulkadiroglu, A., Y.-K. Che and Y. Yasuda (2008), "Expanding 'Choice' in School Choice," unpublished manuscript.
- Abdulkadiroglu, A., P. A. Pathak and A. E. Roth (forthcoming), "Strategy-Proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High School

- Match,” *American Economic Review*.
- Abdulkadiroglu A., and T. Sonmez (2003), “School Choice: A Mechanism Design Approach,” *American Economic Review*, 93 : 729-747.
- Bogomolnaia, A. and H. Moulin (2001), “A New Solution to the Random Assignment Problem,” *Journal of Economic Theory*, 100 : 295-328.
- Che, Y.-K. and F. Kojima (2008), “Asymptotic Equivalence of Random Priority and Probabilistic Serial Mechanisms,” unpublished manuscript.
- Erdil, A. and H. Ergin (2008), “What’s the Matter with Tie-Breaking? Improving Efficiency in School Choice,” *American Economic Review*, 98 : 669-689.
- Gale, D. and L. S. Shapley (1962), “College Admissions and the Stability of Marriage,” *American Mathematical Monthly*, 69 : 9-15.
- Hatfield, J. and F. Kojima (2009), “Substitutes and Stability for Matching with Contracts,” unpublished manuscript.
- Hatfield, J. and F. Kojima (forthcoming), “Group Incentive Compatibility for Matching with Contracts,” *Games and Economic Behavior*.
- Hatfield, J. and P. Milgrom (2005), “Matching with Contracts,” *American Economic Review*, 95 : 913-935.
- Immorlica, N. and M. Mahdian (2005), “Marriage, Honesty, and Stability,” in *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*: 53-62.
- Kojima, F. and M. Manea (2007), “Strategy-Proofness of the Probabilistic Serial Mechanism in Large Random Assignment Problems,” unpublished manuscript.
- Kojima, F. and P. Pathak (forthcoming), “Incentives and Stability in Large Two-Sided Matching Markets,” *American Economic Review*.
- Milgrom, P. (2007), “Package Auctions and Package Exchanges,” *Econometrica*, 75 : 935-966.
- Pathak, P. (2008), “Lotteries in Student Assignment: The Equivalence of Queueing and a Market-Based Approach,” unpublished manuscript.
- Roth, A. E. (1982), “The Economics of Matching: Stability and Incentives,” *Mathematics of Operations Research*, 7 : 617-628.
- Roth, A. E. (1984), “The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory,” *Journal of Political Economy*, 92 : 991-1016.
- Roth, A. E., and E. Peranson (1999), “The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design,” *American Economic Review*, 89 : 748-780.
- Roth, A. E., T. Sonmez and M. U. Unver (2004), “Kidney Exchange,” *Quarterly Journal of Economics*, 119 : 457-488.
- Roth, A. E., T. Sonmez and M. U. Unver (2005), “Pairwise Kidney Exchange,” *Journal of Economic Theory*, 125 : 151-188.
- Roth, A. E., T. Sonmez and M. U. Unver (2007), “Efficient Kidney Exchange: Coincidence of Wants in Markets with Compatibility-Based Preferences,” *American Economic Review*, 97 : 828-851.
- Roth, A. E., and M. A. O. Sotomayor (1990), *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monographs No. 18, Cambridge University Press.
- 坂井豊貴・藤中裕二・若山琢磨 (2008) 『メカニズムデザイン』 ミネルヴァ書房
- 安田洋祐 (2008) 「注目集まる『マーケット・デザイン』：欧米の制度設計で適用」『日本経済新聞』（6月5日「経済教室」）
- 安田洋祐 (2009) 「学校選択制を経済学で考える」『週刊エコノミスト』（1月13日「学者が斬る」）

名著の復刊

# アメリカの大恐慌

吉富 勝【著】

1929年のアメリカの大恐慌にはじまる世界大恐慌の原因解明は今日においてもなお、経済学会における大きな課題をなしている。本書は、恐慌論・世界経済論の観点から実証的・理論的に究明した著者苦心の結晶である。



A5判 6300円(税込)  
ISBN4-535-59031



日本評論社  
www.nipponpon.co.jp/